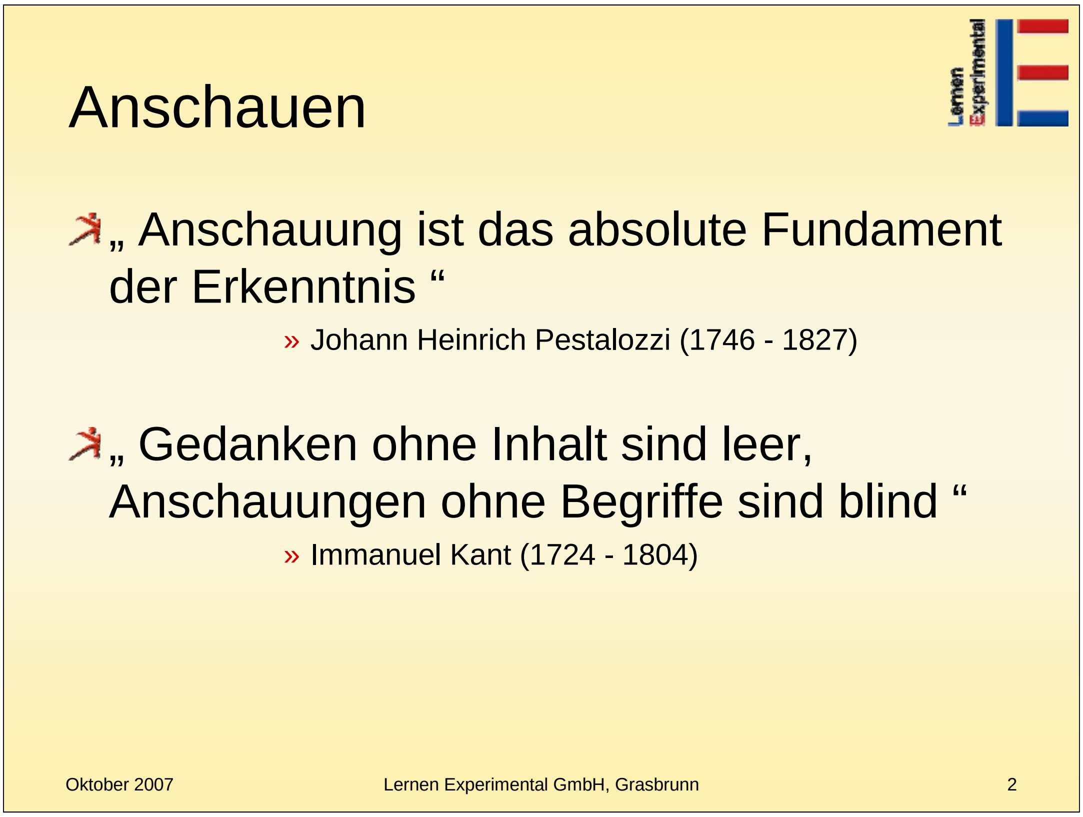
# Mathematische Experimente am PC

Lernen Experimental GmbH




Schon vor über 200 Jahren bemerkte Johann Heinrich Pestalozzi: „ ... Anschauung ist das absolute Fundament der Erkenntnis ...“.

Ihm war klar, dass ein Lehrender sich permanent in der Kunst üben muss, Wissen zu vermitteln, in dem Begriffe anschaulich darstellt werden. Den meisten ist bewusst, dass dies nicht immer einfach ist und auch nicht immer gelingt. Lehrender und Lernender verfügen nicht über den gleichen Wortschatz, sprechen nicht wirklich die gleiche Sprache. Der Informatik-Lehrer meint, wenn er von einer „Klasse“ spricht, die Bauanleitung für ein Objekt. Für den Schüler ist eine Klasse die Gemeinschaft der Schüler. Aber nicht nur die unterschiedliche Bedeutung der Worte  führt zu Missverständnissen, auch die Vielzahl neuer Worte bereitet Probleme. Gerade in der Mathematik mit ihren Hieroglyphen und kryptischen Symbolen ist es besonders schwierig, Zusammenhänge zu verstehen.

Aber reicht Anschauung alleine aus? In seiner „Kritik der reinen Vernunft“ stellte Immanuel Kant fest: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind“.

Mit der Anschauung müssen Begriffe verbunden werden, eine gemeinsame Sprache muss gefunden werden. Bei Verständnisproblemen hilft es einem Schüler wenig, wenn er eine Definition mit mathematischen Symbolen präsentiert bekommt. Er braucht anschauliches Material, was dann mit den Symbolen in Bezug gebracht werden kann.

Nur mit Begriffen zu jonglieren reicht nicht. Es muss der Spagat zwischen Begriff und Anschauung bewältigt werden, um die Erkenntnis zu ermöglichen.

# Lernen

- „ Man lernt am schnellsten und am besten, indem man andere lehrt. „
  - » Rosa Luxemburg (1871 - 1919)

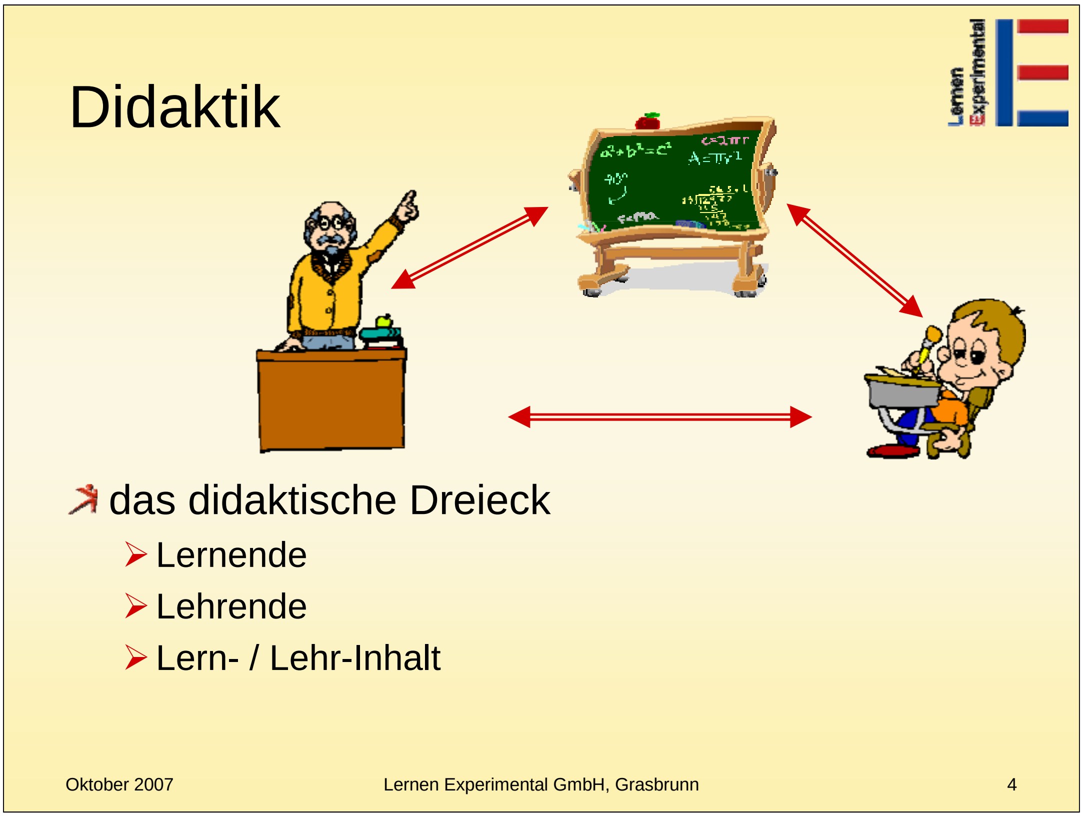
- „ Der Mensch soll lernen. Nur die Ochsen büffeln. “
  - » Erich Kästner (1899 - 1974)



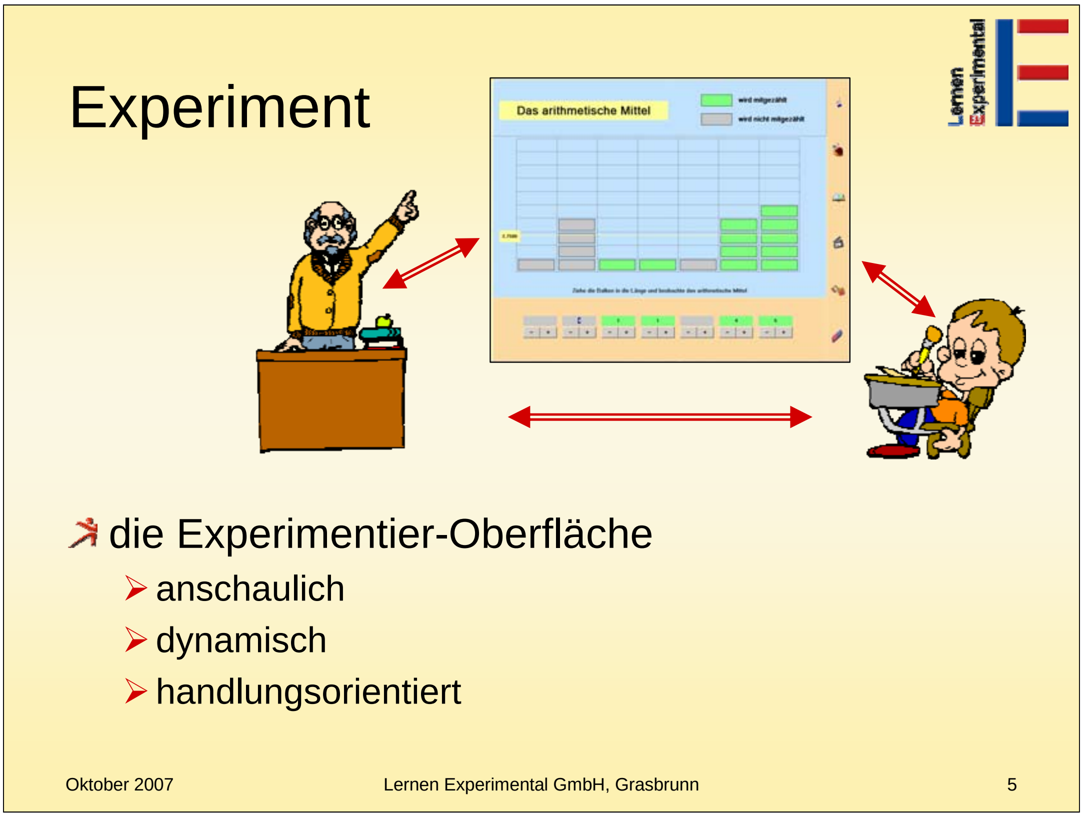
„ Man lernt am schnellsten und am besten, indem man andere lehrt.“

Diese Methode ist bekannt: Hat man eine Problemstellung zu lösen, sucht man sich einen geeigneten Sparringpartner, erklärt diesem den Sachverhalt, und noch während die Fragen zum Problem formuliert werden, kristallisiert sich die Lösung heraus. Dieser Effekt resultiert einfach daraus, dass der eine das Thema erläutert und der andere die richtigen Fragen stellt.

Richtiges Lernen geschieht also nicht durch stures Wiederholen und Auswendiglernen („büffeln“), sondern durch Verstehen der Zusammenhänge und Hintergründe. Wir brauchen also Hilfsmittel, um das Erforschen von Zusammenhängen und den Dialog darüber zu ermöglichen.




Das didaktische Dreieck setzt sich aus den drei Komponenten Lernende, Lehrende und Lern-/Lehr-Inhalt zusammen. Üblicherweise werden die Lern-/Lehr-Inhalte vom Lehrer an der Schultafel präsentiert und im Vortrag bzw. Dialog den Schülern verständlich gemacht. Diese Bilder sind jedoch immer statisch. In manchen Fächern kann dies durch einen Versuchsaufbau ergänzt werden, es wird ein richtiges Experiment vorgeführt. Das Thema wird anschaulich dargestellt. Wie von selbst tauchen Fragen dazu auf, lassen sich Lösungen aus den Experiment-Ergebnissen ableiten. In Zeiten permanenter Reizüberflutung durch die verschiedensten Medien wird es immer schwerer, den Unterricht lebendig und anschaulich zu gestalten. Das Ziel ist, den Schüler als Entdecker agieren zu lassen. Der Lehrer tritt in den Hintergrund, er lenkt und leitet an, er wird zum Coach.




Das Experiment ist eine Methode, um Aussagen über Ursache-Wirkungs-Beziehungen zu finden.

Mit Hilfe des PCs ist es möglich, an Stelle der Schultafel eine Experimentier-Oberfläche anzubieten, anhand derer die Lehr-/Lern-Inhalte nicht nur statisch präsentiert werden. Hier kann ein Thema erforscht werden. Es wird anschaulich grafisch dargestellt. Hinter den Beziehungen zwischen den verschiedenen grafischen Objekten stecken feste Regeln. Diese Zusammenhänge können erforscht werden.

Die Darstellung der Lehr-/Lern-Inhalte ist nicht wie an der Tafel statisch, sondern kann dynamisch geändert werden. Mit wenigen Mausklicks oder Tasteneingaben ändert sich die Darstellung. Farbe, Anordnung und/oder Größe der Objekte kann verändert werden. Wird zunächst nur mit der Oberfläche gespielt, so tauchen doch bald die Fragen auf: „was passiert, wenn hier geklickt wird? ... dort ein Wert geändert wird? ...“ Hier kann der Lehrer mit geschickter Fragestellung steuern. Durch seine Anleitung decken die Schüler Wechselwirkungen auf und erforschen die Regeln, die dahinter stecken.

Diese Experimentier-Oberflächen sind nicht nur dazu geeignet, ein neues Thema einzuführen und im Dialog mit der ganzen Klasse die Zusammenhänge zu ergründen, sondern auch dazu, dem Schüler die Möglichkeit zu bieten, ein Thema selbst zu vertiefen. Die Experimentier-Oberfläche ermöglicht die Erstellung von Skripten und Arbeitsblättern. Sie unterstützt einen Vortrag oder z.B. das Erforschen des Themas im Gespräch zwischen Schülern, auch Arbeitsaufträge als Hausaufgabe sind denkbar.

## Wissensvermittlung

Lehrplan Klasse 5:

- die Menge der natürlichen Zahlen und ihre Veranschaulichung am Zahlenstrahl,
- Veranschaulichen von Anzahlen durch Diagramme,
- das Zehnersystem als Stellenwertsystem, Ausblick auf das römische Zahlensystem.

Oktober 2007 Lernen Experimental GmbH, Grasbrunn 6

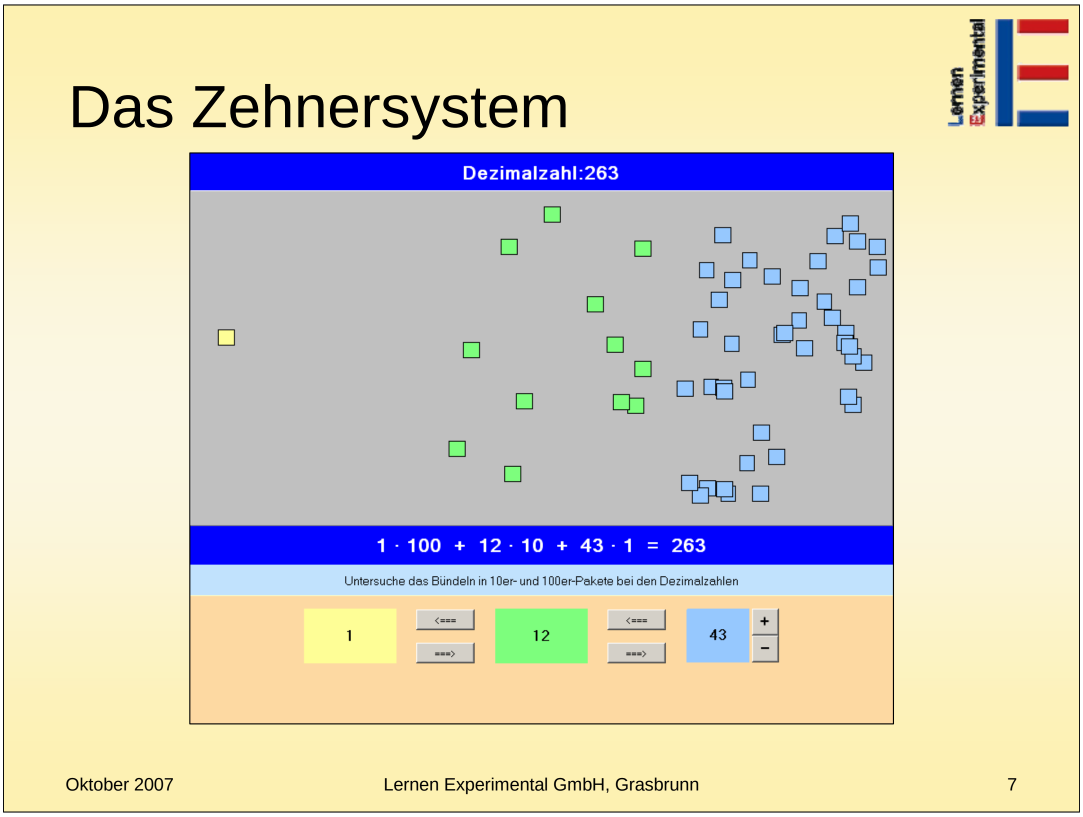
Der Lehrplan für das bayerische Gymnasium G8 beginnt für das Fach Mathematik mit dem Thema:

M 5.1.1 Die natürlichen Zahlen (ca. 9 Std.)

In der Grundschule wurden zum Abzählen und Rechnen natürliche Zahlen bis zu einer Million verwendet. Daran anknüpfend lernen die Schüler nun auch größere natürliche Zahlen kennen und verstehen, dass die Menge der natürlichen Zahlen kein größtes Element besitzt. Sie veranschaulichen Anzahlen, runden sie und lernen das kulturhistorisch bedeutsame Zahlensystem der Römer als Beispiel für ein System kennen, das kein Stellenwertsystem ist.

* die Menge IN der natürlichen Zahlen und ihre Veranschaulichung am Zahlenstrahl
* Veranschaulichen von Anzahlen durch Diagramme
* das Zehnersystem als Stellenwertsystem, Ausblick auf das römische Zahlensystem

Im Folgenden werden verschiedene Module für den PC vorgestellt, welche für die o.g. Punkte des Lehrplans eine Experimentier-Oberfläche bieten.



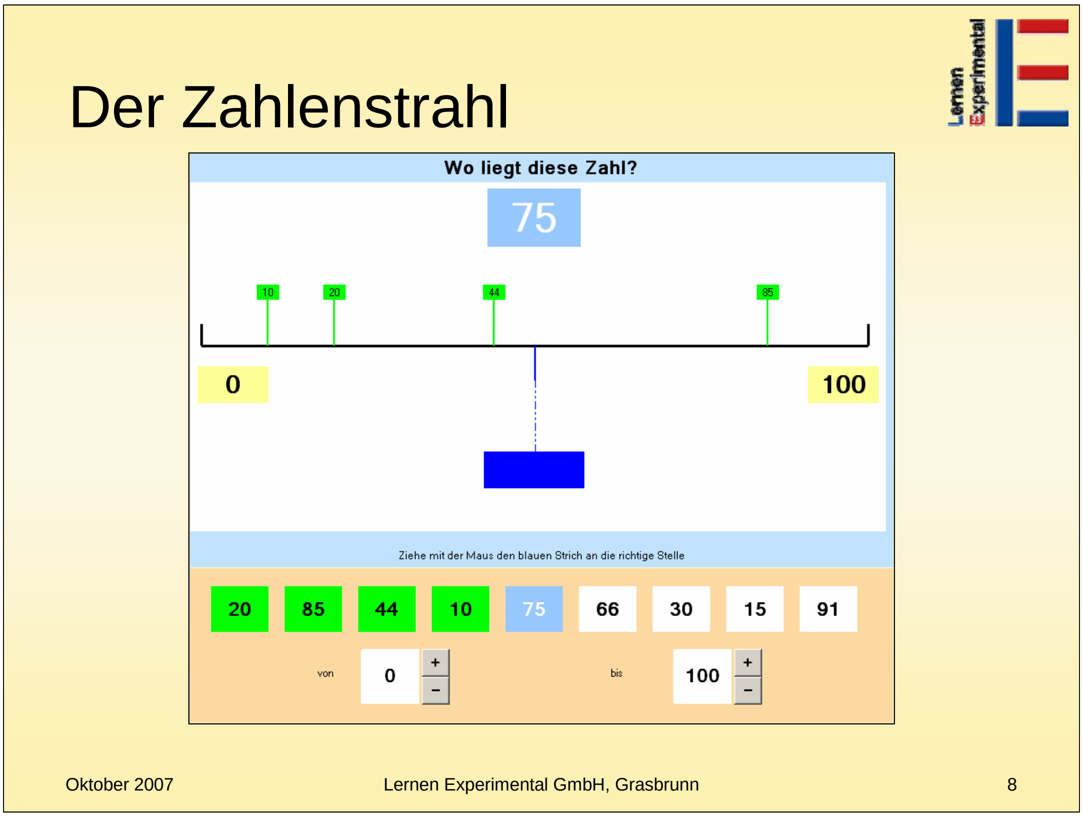

Modul 5. Klasse, die natürlichen Zahlen, das Zehnersystem:

In diesem Experiment geht es darum zu verstehen, dass das bei uns gebräuchliche Dezimalsystem im Gegensatz zum römischen Zahlensystem ein Stellenwertsystem ist. Auf anschauliche Weise wird dargestellt, dass hinter jeder Ziffer einer mehrstelligen Dezimalzahl das Vielfache einer Zehnerpotenz steht. Dabei ist die Höhe der Potenz von der Stelle innerhalb der Dezimalzahl abhängig. Durch die spielerische Bedienung des Experimentes tauchen Fragen auf wie „Wann kann gebündelt werden?“, „Wie viele Einer müssen hinzugefügt werden, um wieder ein Zehnerbündel zu ermöglichen?“, „Was passiert, wenn ich ein Bündel wieder auflöse?“ und viele mehr. Nach anfänglichem planlosen Klicken wird die Bedienung immer zielgerichteter bis die zu erforschende Regel erkannt ist.

Es ist nicht selbstverständlich, dass die Dezimalzahl 263 als 200+60+3 interpretiert wird. Ausgehend von 263 Kästchen im Einer-Feld werden zunächst z.B. 22 Mal 10 Kästchen zu 22 Kästchen im Zehner Feld zusammengefasst (gebündelt). 10 Kästchen im Zehner-Feld werden ihrerseits durch einen einziges Kästchen im Hunderter-Feld ersetzt. Eine mehrstellige Dezimalzahl zeigt sich somit als Ergebnis eines Bündelungsvorgangs aus mehreren Schritten. Es sind immer noch mehr als zehn Kästchen im Einer-Feld, es kann weiter gebündelt werden, auch im Zehnerfeld.

Anleitung:

Stelle eine Zahl ein. Sofort werden ebenso viele Kästchen ins Einer-Feld gesetzt. Klick nun auf den Schalter für die Zehnerpakete und beobachte, wie zehn Kästchen zu einem einzigen neuen Kästchen zusammengefasst werden und im Zehnerfeld platziert wird. Klicke solange auf diesen Schalter bis auf dem Einer-Feld weniger als zehn Kästchen übrigbleiben. Schließlich entstehen aus einem unsortierten Einerhaufen mit vielen Kästchen drei neue Haufen. Dahinter könnte zum Beispiel die Rechnung 263*1 = 2*100 + 6*10 + 3*1 stecken.



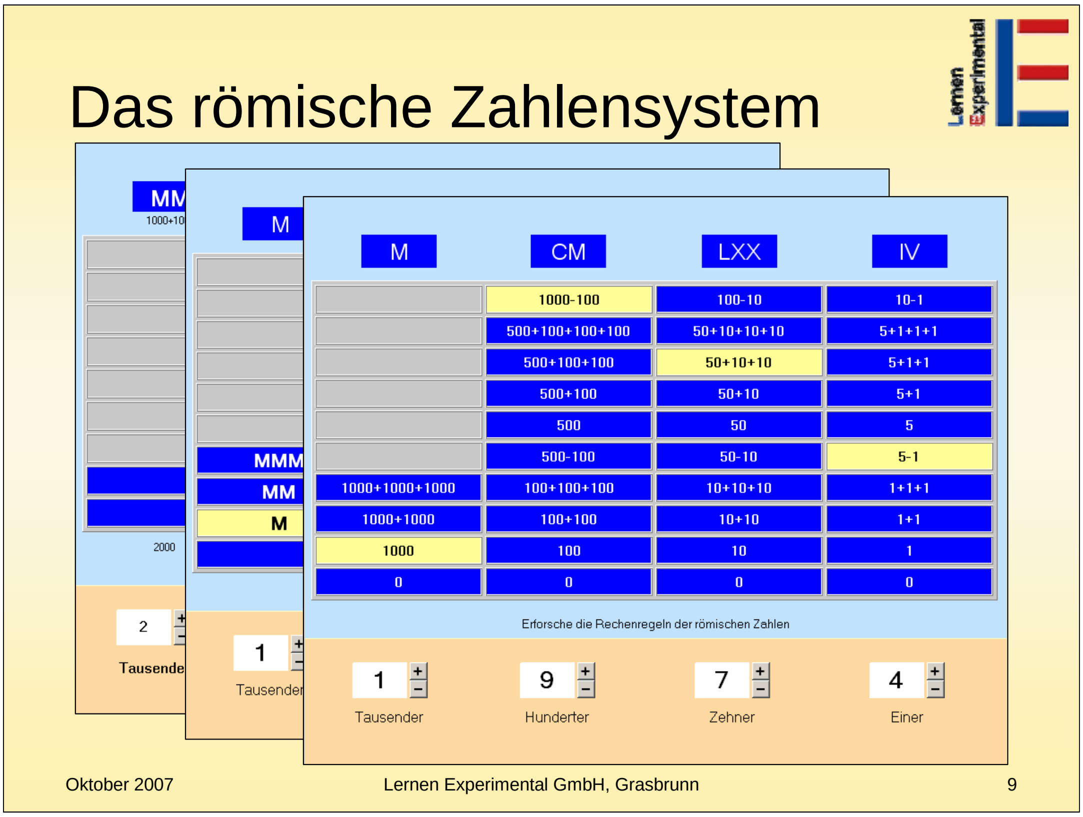

Modul 5. Klasse, die natürlichen Zahlen, der Zahlenstrahl:

In diesem Experiment ist der Zahlenstrahl ohne Skalierung dargestellt, um ein langsames Herantasten an Größenverhältnisse zu ermöglichen. Einzig durch die farbliche Metapher - grün/richtig und rot/falsch - wird der Schüler zur richtigen Position auf dem Zahlenstrahl gelenkt.

Es gibt einen angeborenen Zahlensinn, der uns dabei hilft, Verhältnisse gut abzuschätzen. Wo die Mitte einer vorgegebenen Strecke ist, kann per Augenschein leicht herausgefunden werden. Sobald aber Symbole (Zahlen) im Spiel sind, geht die unmittelbare Anschauung verloren. Während die Zahlen 56 und 65 als symbolische Gebilde leicht zu verwechseln sind, ist ihre Anordnung am Zahlenstrahl -und damit ihre Verschiedenheit- auffällig genug, um einen Größenvergleich vorzunehmen.

Anleitung:

Verschiebe den Balken der gesuchten Zahl mit der Maus an die Stelle auf dem Zahlenstrahl, von der du glaubst, dass dort die vorgegebene Zahl liegen könnte. Wenn du die Zahl nicht exakt getroffen hast, kannst du den Strich solange weiter verschieben, bis du die richtige Stelle getroffen hast. Danach wird dir die nächste Zahl angezeigt.




Modul 5. Klasse, die natürlichen Zahlen, das römische Zahlensystem:

Für das römische Zahlensystem sind zwei verschiedene Experimente verfügbar. Während das erste Experiment das Zählen und die Übergänge (9 nach 10 usw.) verdeutlicht, stellt das zweite Experiment den Aufbau römischer Zahlen im Vergleich zum Dezimalsystem dar.

a) Das Hochzählen im Dezimalsystem folgt einem strengen und klaren Schema, während die römischen Zahlzeichen über Rechnungen (Addition XX = 10+10, oder Subtraktion IX = 10-1) zu größeren Zahlen kombiniert werden können. Im Dezimalsystem ist eine dreistellige Zahl immer größer als eine zweistellige Zahl, was bei den römischen Zahlzeichen aber anders sein kann, wie am Beispiel CCCXXXIII = 333 im Vergleich mit CM = 900 zu erkennen ist.

b) Die Römer hatten kein so einfaches Zahlensystem wie wir heute. Anstelle der Ziffern von 0 bis 9 standen die Symbole: I = 1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500 und M=1000. Diese mussten rechnerisch miteinander kombiniert werden. Während wir 2*10 + 9*1 = 29 rechnen, heißt die Rechnung bei den römischen Zahlzeichen XXIX: 10+10 + (10 - 1) = 29, was gerade bei größeren Zahlen recht umständlich werden kann.

Anleitung:

a) Wenn du die Dezimalzahl verstellst, kannst du sehen wie sie in römischen Zahlzeichen geschrieben wird. Achte dabei besonders auf den Wechsel von 9 nach 10 (oder von 19 nach 20, usw.). Vergleiche die dezimale und römische Zählweise miteinander. Die Balken im Experimentierbereich sind auch anklickbar.

b) Im Eingabebereich kannst du eine vierstellige Dezimalzahl einstellen. Du kannst auch direkt auf die römischen Zahlzeichen klicken, um dir eine beliebige Zahl zwischen 0 und 3999 anzeigen zu lassen. Es dürfen höchstens drei gleiche römische Zahlzeichen nebeneinander stehen. Mit den Zahlzeichen I,V ... bis M kann man nur Dezimalzahlen bis 3999 darstellen.

# Heuristische Strategien

- Induktion
  - probiere systematisch
- Variation
  - variiere das Gegebene
- Interpretation
  - übersetze, modelliere
- Reduktion
  - unterscheide Fälle

Grundzüge der Mathematikdidaktik © Prof. Dr. Alfred Schreiber

Oktober 2007 Lernen Experimental GmbH, Grasbrunn 10

Laut Duden ist die Heuristik die „Lehre, Wissenschaft von Verfahren, Probleme zu lösen“.

Die Heuristik bietet vier Gruppen von Strategien, die hier kurz angesprochen werden, das sie in den Experimentiermodulen Verwendung finden.

Induktion (probiere systematisch)

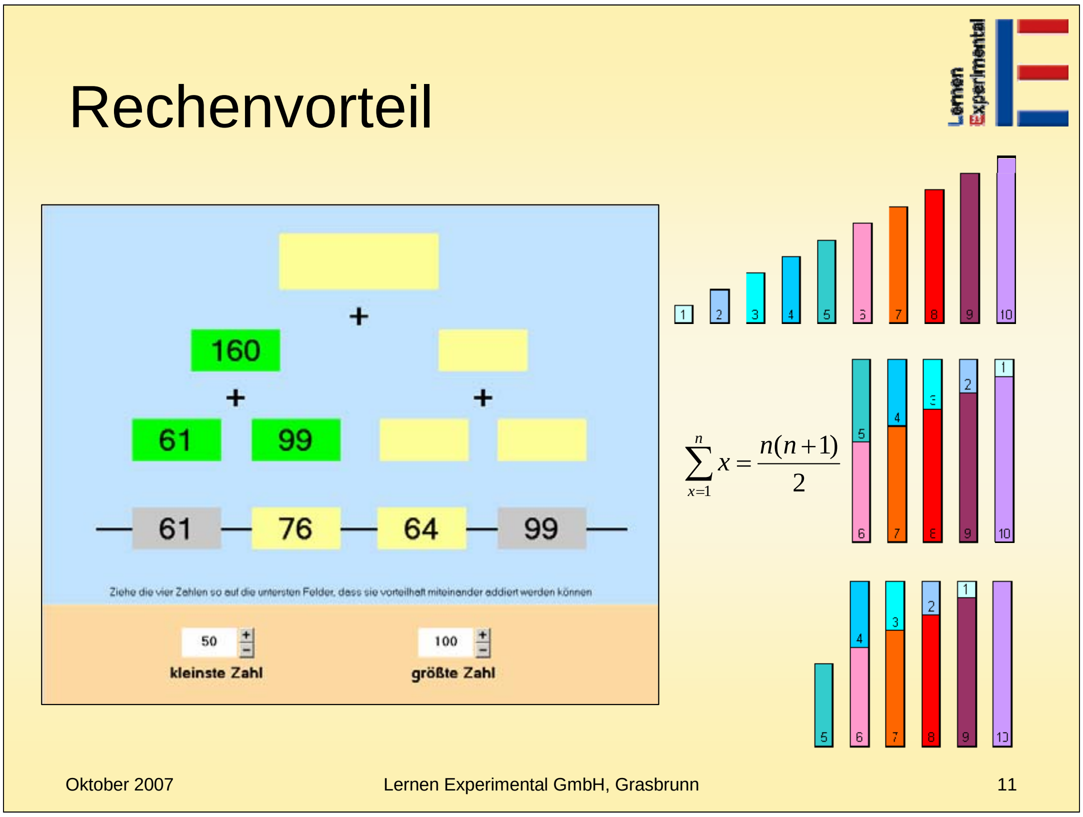
Variation (variiere das Gegebene)

Interpretation (übersetze, modelliere)

Reduktion (unterscheide Fälle)

(Quelle Grundzüge der Mathematikdidaktik © Prof. Dr. Alfred Schreiber)

Die Experimentier-Oberfläche bietet das Grundwerkzeug, um heuristisches Denken und Handeln zu schulen. Immer wieder wird der Schüler mit der Frage konfrontiert: „Was passiert, wenn ich diese oder jenes tue?“. Immer wieder geht es darum, die durch das eigene Handeln hervorgerufenen Veränderungen der Experimentier-Oberfläche zu beobachten und daraus Schlüsse zu ziehen. Der Schüler wird angeregt, eigene Strategien zu entwickeln, um Gesetzmäßigkeiten zu entschlüsseln.

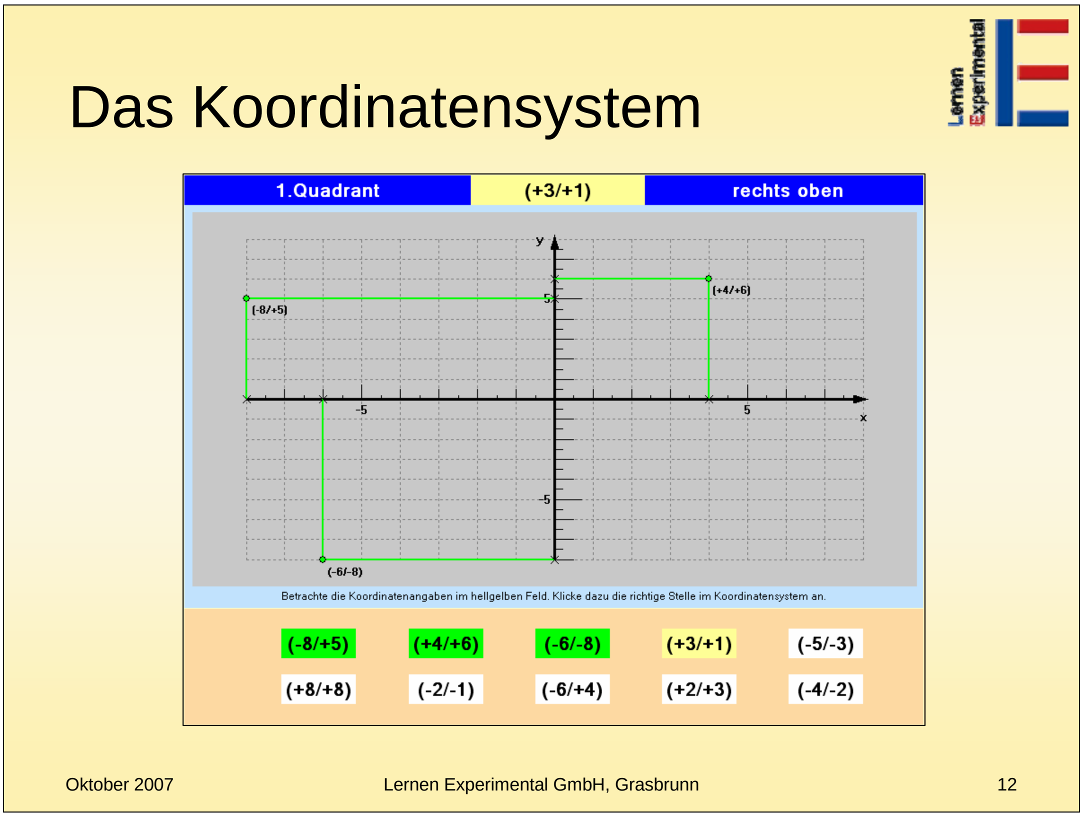



Modul 5. Klasse Addition und Subtraktion, Rechenvorteil

Aus der Analysis kennen wir die Formel zur Berechnung von Potenzsummen: man addiert das letzte und das erste Element der Reihe und multipliziert dies mit der halben Anzahl der Elemente. So die etwas umgangssprachliche Beschreibung der Formel. Will man jedoch unabhängig von einer Reihe mehrstellige Zahlen addieren, versucht man sich Vorteile zu schaffen, indem besonders „leicht“ zu addierende Zahlen kombiniert werden. Im Dezimalsystem werden am besten Zahlenpaare gesucht, die miteinander addiert die Zahl 10 oder ein Vielfaches davon bilden. In diesem Experiment sollen 4 Zahlen addiert werden, die  nicht einfach von links nach rechts zusammengezählt werden, sondern  erst paarweise geordnet werden. Den Schülern sollte bewusst sein, dass dies aufgrund des Kommutativ-Gesetzes möglich ist. Sind die Paare richtig gefunden, werden die Ergebnisse beider Additionen zum Endergebnis zusammengefasst. Das Endergebnis steht dann im Rechenbaum an oberster Stelle.

Anleitung:

Ziehe jeweils zwei zueinander passende Zahlen in die zwei linken und die zwei rechten Felder des Rechenbaumes. Zwei Zahlen passen zueinander, wenn ihre Summe durch 10 oder 100 oder 1000 teilbar ist. Hast du die vier Zahlen richtig zugeordnet, werden beide Teilsummen und das Gesamtergebnis selbständig berechnet.



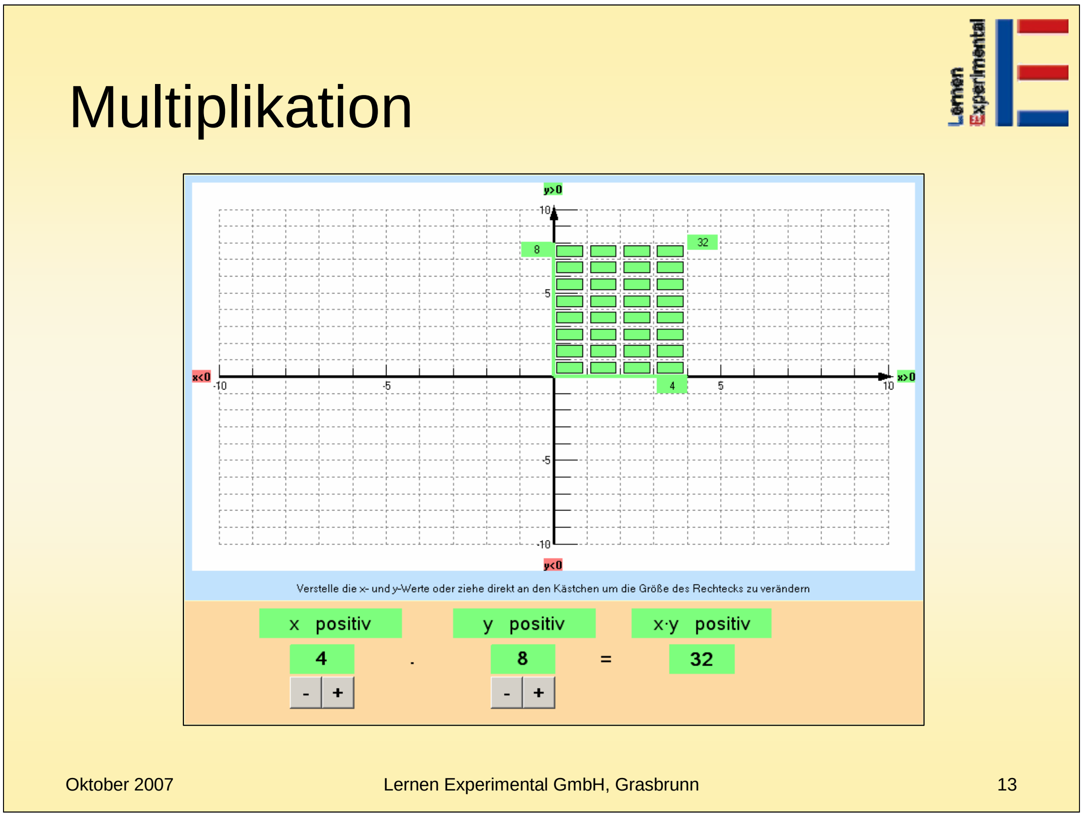

Modul 5. Klasse Geometrische Grundbegriffe, das Koordinatensystem:

Während es sich beim Zahlenstrahl nur um eine lineare Abfolge von Zahlen handelt, geht es beim Koordinatensystem um die geometrische Anordnung von zwei Zahlen. Mit ihnen kann jeder Ort auf einer Fläche eindeutig bestimmt werden. Der Punkt P(3/4) ist nicht zu verwechseln mit dem Punkt Q(4/3), weil die erste Zahl angibt, wie viele Schritte es nach rechts (oder links) geht; die zweite Zahl teilt mit, wie weit es nach oben oder unten ist. Aus beiden Bewegungen -horizontal und vertikal- wird auf eindeutige Weise jeder Punkt in der Fläche erreichbar.

Als weitere Hilfestellung ist über dem Koordinatensystem der Quadrant angegeben, in dem der gesuchte Punkt liegt (1. - 4. und umgangssprachlich rechts/links-oben/unten).

Anleitung:

Klicke den Punkt, dessen Koordinatenangaben gelb markiert sind, im Koordinatensystem an. Wenn du dich irren solltest, hilft dir das Programm und führt die Symbole an ihren richtigen Platz. Achte auch auf die Orientierungshilfe oberhalb des Koordinatensystems (Feldbereich, Punkt und Orientierung) während du den Mauszeiger über eine Koordinatenangabe bewegst.

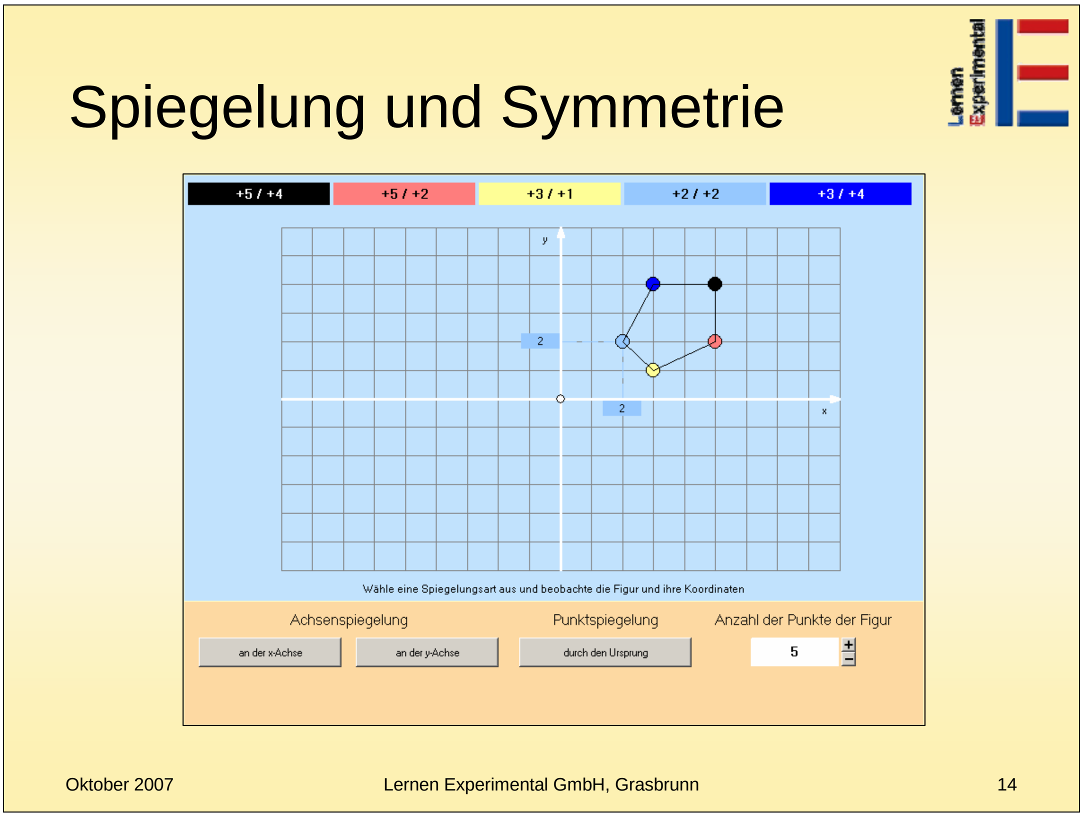



Modul 5. Klasse die ganzen Zahlen, Multiplikation:

Hinter der Rechnung 4*8 = 32 könnte die Aufgabe stehen: "Ein Rechteck ist 4 Einheiten breit und 8 Einheiten hoch. Wie groß ist sein Flächeninhalt?" Wie die Multiplikation auch mit negativen Zahlen geometrisch gedeutet werden kann, will dieses Experiment zeigen. Indem positive Zahlen grün und negative Zahlen rot dargestellt werden, wird einprägsam verdeutlicht, wann das Ergebnis der Multiplikation negativ und wann positiv wird. Nicht nur wenn beide Faktoren positiv sind, sondern auch wenn beide Faktoren negativ sind und somit rot dargestellt werden, ist das Produkt positiv und die Fläche wird grün dargestellt. Durch die leichte Bedienung nicht nur über die Zahlenfelder sondern auch direkt im Koordinatensystem, sind die Regeln schnell erkannt.

Anleitung:

Stelle Länge und Breite des im Koordinatensystem sichtbaren Rechtecks ein. Achte auf die Farbe rot oder grün des Rechtecks - überlege, wann das Rechteck rot wird und wann grün - du kannst aber auch an der äußersten Ecke des Rechtecks Länge und Breite ändern: die Rechnung verändert sich entsprechend.



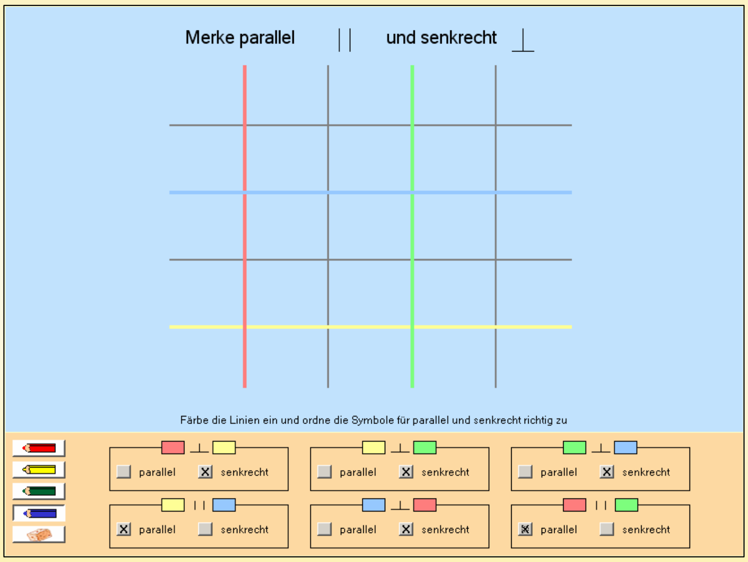

Modul 5. Klasse Geometrische Grundbegriffe, Spiegelung und Symmetrie:

Einerseits sind Figuren während der Spiegelung beobachtbar - andererseits lassen sich die Koordinaten der Figurenpunkte einblenden: an ihnen sollte in jedem der drei Fälle ein möglicher Vorzeichenwechsel beobachtet werden. Denn bei der x-Achsenspiegelung wird nur der Wert einer y-Koordinate durch ihre Gegenzahl ausgetauscht. Bei der y-Achsenspiegelung ist es gerade umgekehrt. Und bei der Punktspiegelung verwandeln sich beide Koordinatenwerte in ihre Gegenzahl.

Anleitung:

Wähle eine Spiegelungsart aus und achte dann auf die Bewegungen der farbigen Kreise. Wann wandern die Kreise durch eine der beiden Achsen? Wann laufen die Kreise durch den Koordinatenursprung? Klicke in der Seitenleiste auf das Buchsymbol, um dir die Koordinaten der Punkte anzeigen zu lassen. Verfolge dabei vor allem die Vorzeichen vor und nach einer Spiegelung. Was hat sich geändert - was ist gleich geblieben?

# Lagebeziehung von Geraden



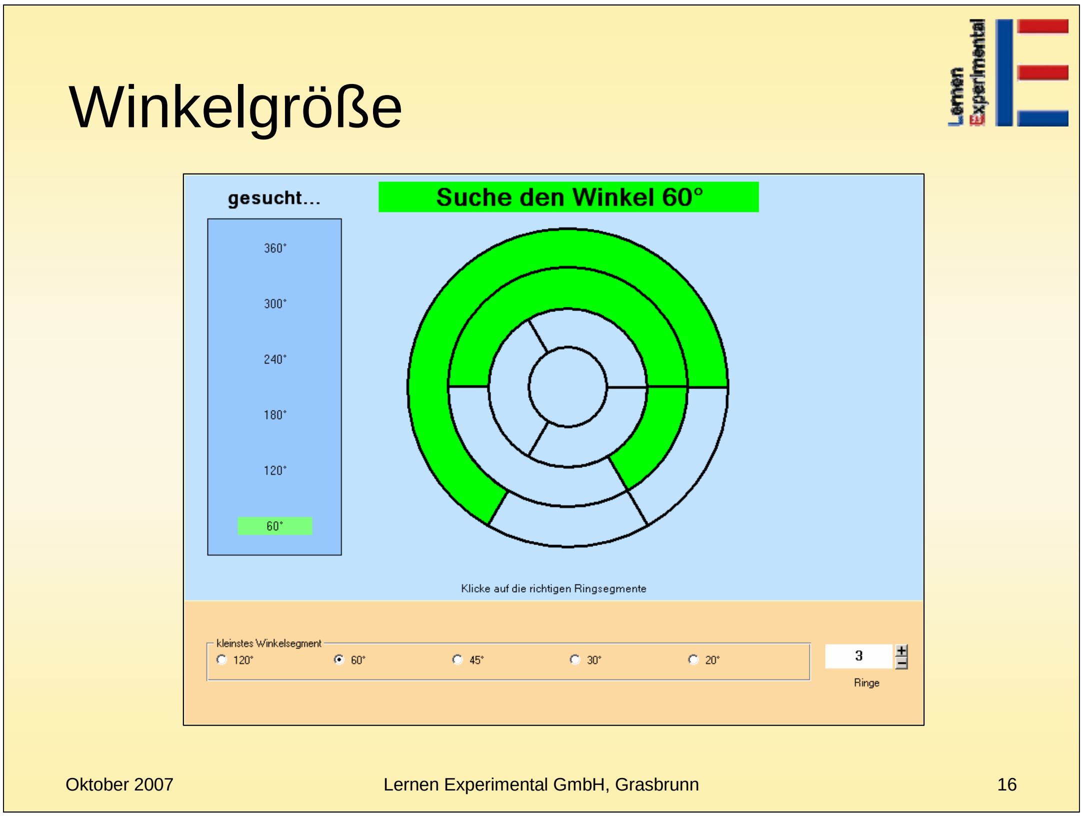

Oktober 2007 Lernen Experimental GmbH, Grasbrunn 15

Modul 5. Klasse Geometrische Grundbegriffe, Lagebeziehung von Geraden:

Das Adjektiv 'parallel' hat in der Mitte zwei ll, die parallel zueinander sind. Im Adjektiv 'senkrecht' ist leider keine solche Eselsbrücke zum Lernen versteckt. Und so denkt der Lernende bei senkrecht am besten an zwei aneinandergrenzende Heftkanten. Wie das Heft auf dem Tisch liegt, ist dabei egal: Hauptsache, die Kanten stehen nicht schief zueinander, oder gar parallel - ist so eine Situation überhaupt vorstellbar? Mit diesem Experiment lassen sich die Begriffe leicht einprägen.

Anleitung:

Färbe bis zu vier Striche auf dem grauen Gitter mit den Buntstiften ein. Es müssen mindestens zwei farbige Striche auf dem Gitter sein. Entscheide, in welcher Lagebeziehung (senkrecht oder waagerecht) die Geraden zueinander stehen. Ob deine Entscheidung richtig ist, siehst du, wenn du auf das Buchsymbol klickst.

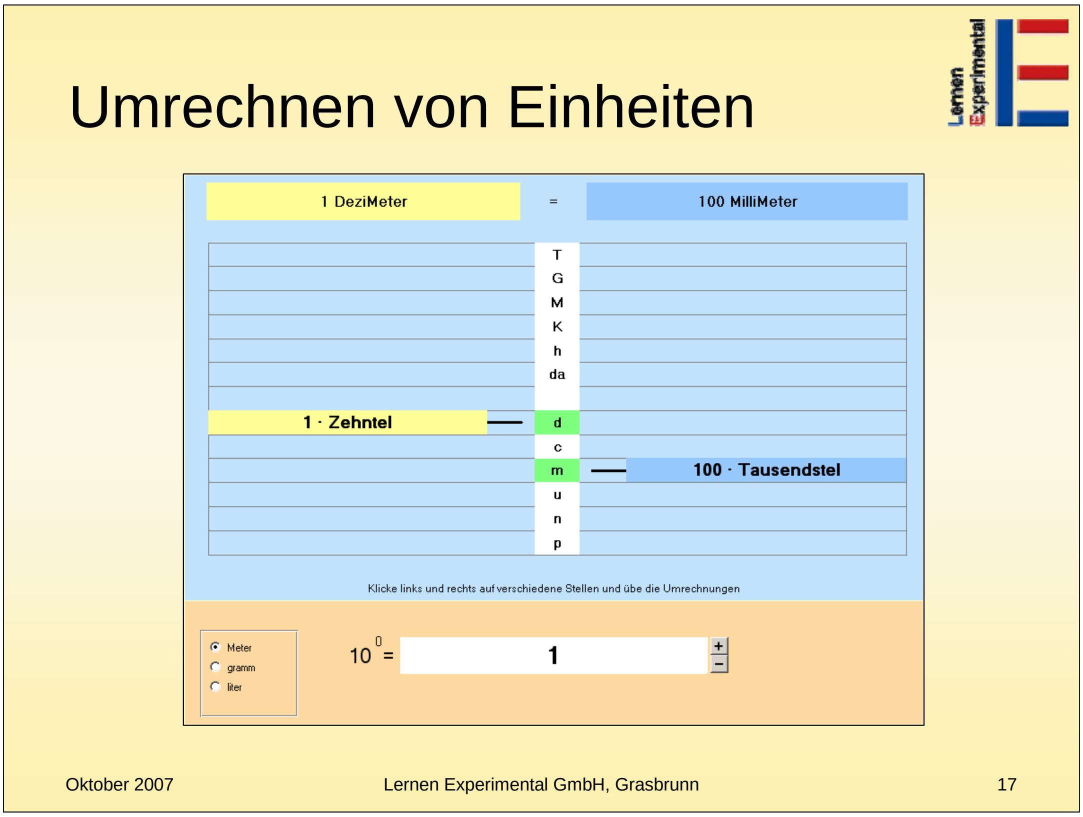



Modul 5. Klasse Geometrische Grundbegriffe, Schätzen von Winkeln:

Nachdem die Schüler die Winkelbegriffe (spitzer, stumpfer, rechter Winkel etc.) gelernt haben, dient dieses Experimentiermodul dazu, einen Blick für Winkelgrößen zu bekommen. Wichtige Winkel (30°, 45°, 90°, etc.) sollen auf einer Kreisfigur mit verschiedenen Segmenten erkannt werden. Hier kommt es auf eine gute Vorstellungskraft an, da die Winkelspitze nicht zu sehen ist.

Anleitung:

Fahre mit der Maus über die kompliziert aussehende Kreisfigur und überlege dir bei jedem Segment, wie groß der Winkel wohl sein mag. Klicke auf diejenigen Segmente, deren Gradzahl dir das Programm angibt. Versuche alle Felder grün einzufärben. Wenn du ein falsches Segment anklickst, färbt es sich rot. Am Ende des Spiels wird der Spielstand angezeigt. Danach wird dir ein neues Spiel aufgebaut.

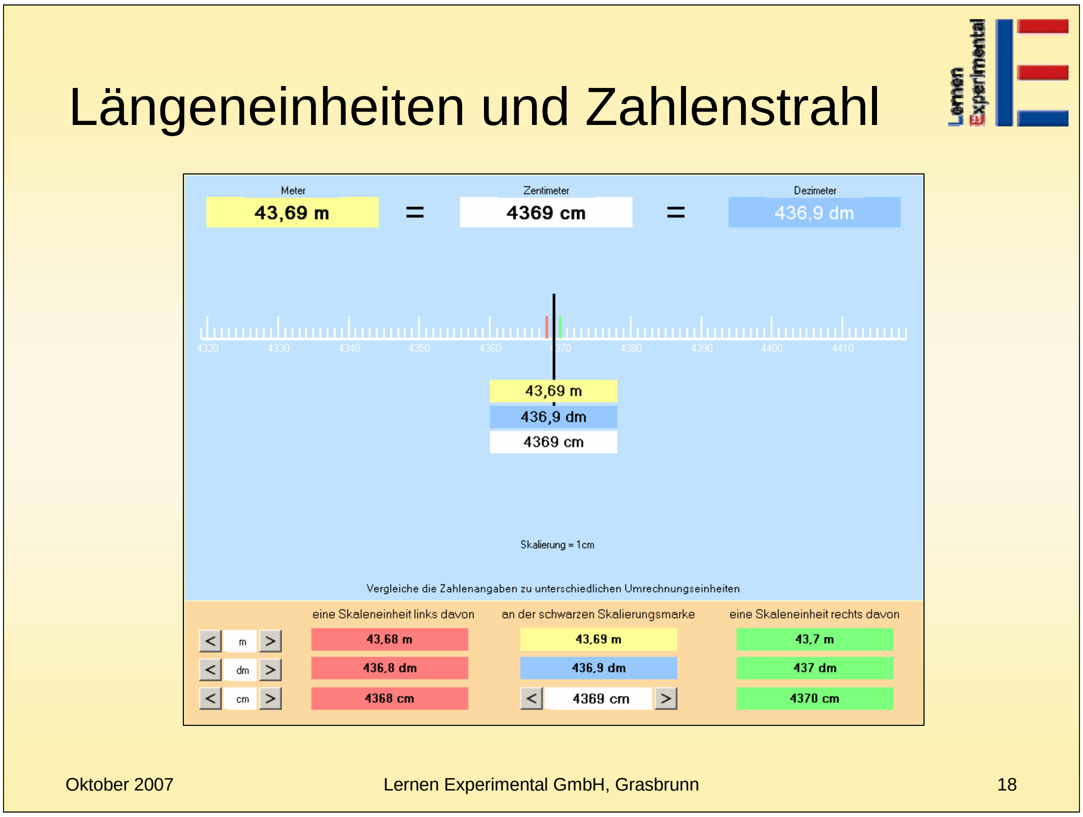



Modul 5. Klasse, Größen und ihre Einheiten, Umrechnen von Einheiten:

Zum Glück gibt es Abkürzungen für große Zahlen. Statt 1 000 000 heißt es kurz: 1 Million. Aber wie wird eine 1 mit 9 Nullen ausgedrückt? Oder eine 1 mit 20 Nullen? Wenn es nicht so viele Nullen sind, gibt es meist Abkürzungen kilo, mega, giga - zum Beispiel im Zusammenhang mit technischen Größen: Kilometer, Megaliter, Gigagramm. Bei kleinen Zahlen gibt es ebenfalls Abkürzungen: 1 Millimeter entspricht einem Tausendstel Meter, oder als Kommazahl: 0,001m. Daneben kennt die Mathematik noch eine besondere Schreibweise in Form von Hochzahlen, deren Bedeutung ebenfalls experimentell erforscht werden kann.

Anleitung:

Klicke links und rechts im Experimentierbereich in eine beliebige Zeile. Lege verschiedene physikalische Größen fest- bedenke, dass nicht alle Einheitenumrechnungen üblich sind, mathematisch aber sehr wohl definiert werden können. Die angezeigte Zahl kann mit einem Vielfachen von zehn multipliziert werden, und liefert dir so auch Gelegenheit für kompliziertere und längere Zahlen.

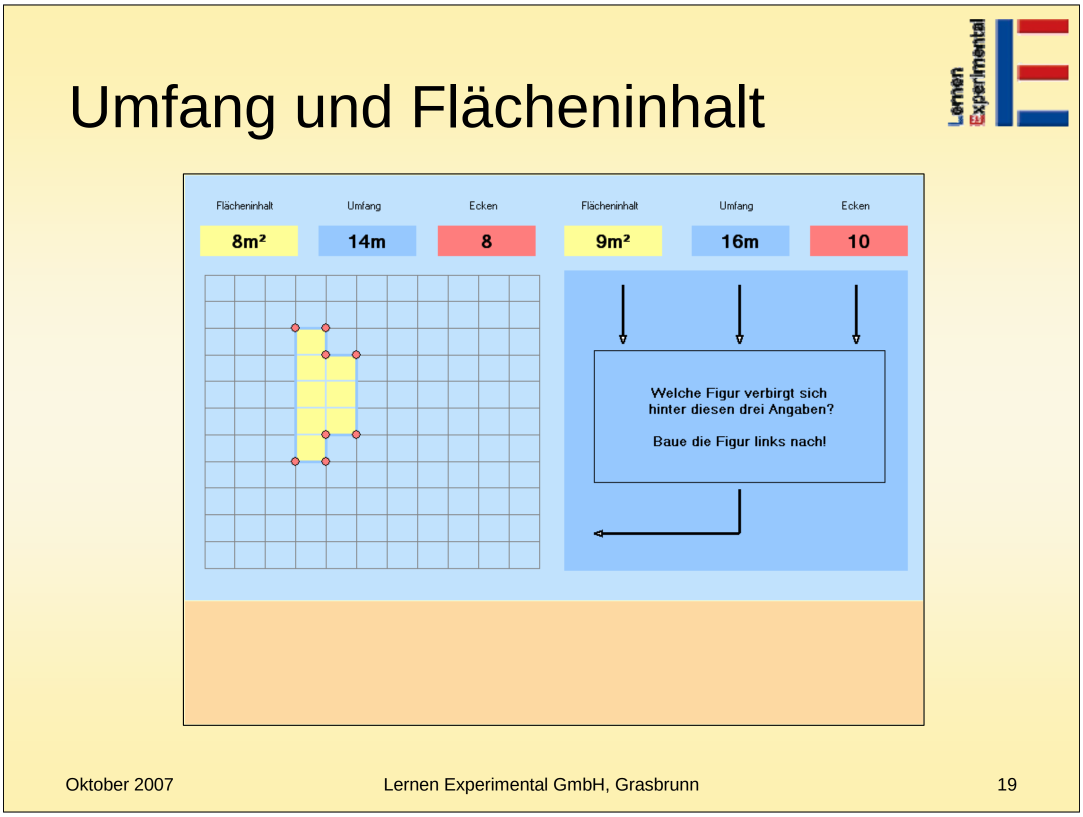



Modul 5. Klasse, Größen und ihre Einheiten, Längeneinheiten und der Zahlenstrahl:

Wenn jemand sagt, er sei 0,00185 km groß, runzeln wir etwas die Stirn - ebenso bei der Größenangabe 1850 mm; Üblich ist die Angabe von Körpergrößen in der Einheit Zentimeter: 185 cm oder umgerechnet in Meter: 1,85 m. Ein Zentimeter weniger ist 184 cm; aber was ist ein Millimeter weniger als 185 cm? Oder ein Millimeter mehr? Vielfältige Längenumrechnungen sind denkbar, die alle geübt sein wollen.

Anleitung:

Verschiebe mit der Maus die schwarze Markierung am Zahlenstrahl. Drei Zahlenfelder bewegen sich dabei. Achte auf die Umrechnung ihrer Einheiten. Die Einheiten können im Eingabebereich geändert werden. Auswahl: Millimeter, Zentimeter, Dezimeter, Meter, Kilometer.

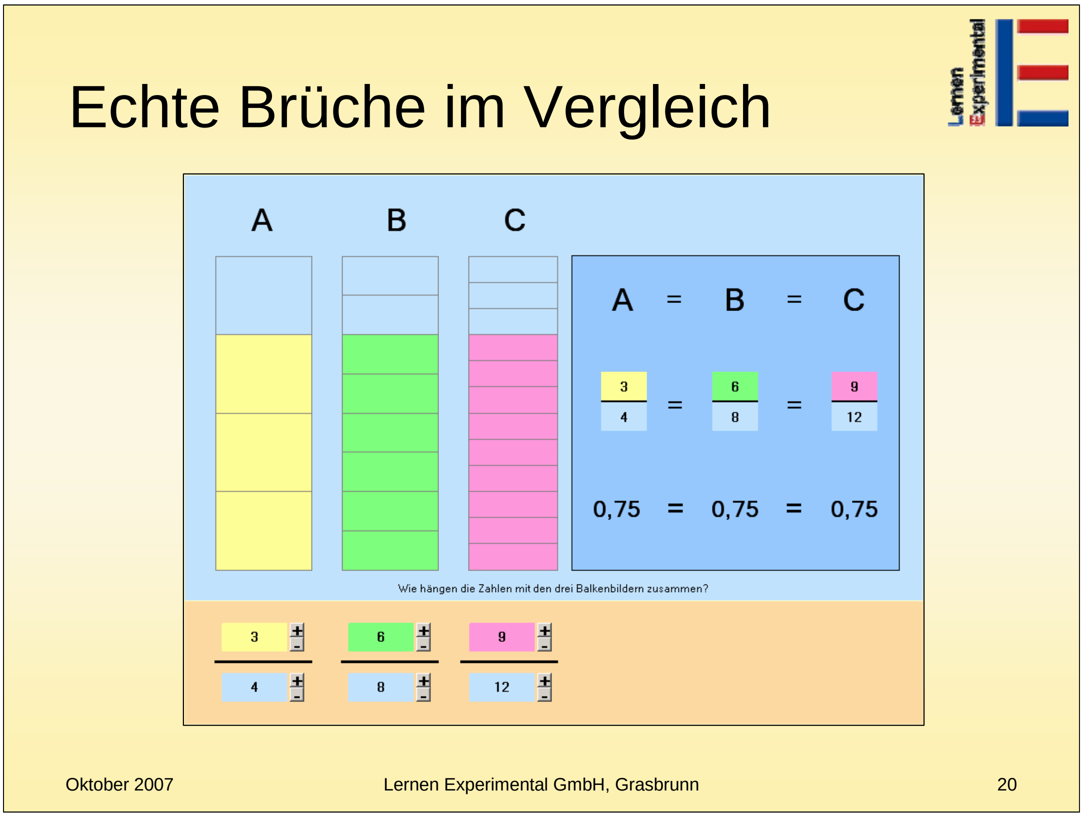



Modul 5. Klasse, Größen und ihre Einheiten, Umfang und Flächeninhalt:

Wie könnte eine flächenhafte rechtwinklige Figur aussehen, deren Umfang 4 Meter und Flächeninhalt 1 m² beträgt und die 4 Ecken besitzt? Es ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 Meter! Oder schwieriger: eine Figur soll 4 m² groß sein, einen Umfang von 10 Meter haben und 6 Ecken besitzen? Eine mögliche Lösung besteht aus vier quadratischen Kästchen, die sich zu einem 'L' zusammenfügen. Zu manchen unterschiedlichen Figuren, gibt es überraschenderweise mehrere gleichartige Zahlenkombinationen aus Fläche, Umfang und Anzahl der Ecken. Die Anzahl an weiteren denkbaren Figuren wächst rasch, aus je mehr Quadraten die Figur aufgebaut ist.

Anleitung:

Klicke als erstes in der Seitenleiste auf das Buchsymbol, um zu sehen, welche Figur gesucht ist. Baue diese Figur -in einer ersten Kennenlernübung- im linken Spielfeld nach und achte auf die Zahlenangaben zur Fläche, zum Umfang und der Anzahl der Ecken. Klicke auf das Würfelsymbol, um nun selber die Lösung zu einer neuen Spielsituation zu finden. Interessanterweise gibt es oft mehrere Figuren mit denselben Zahlenwerten!



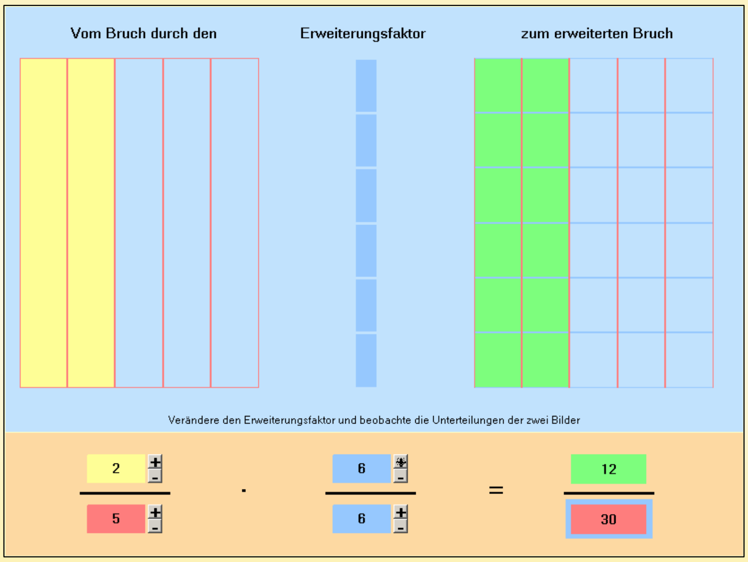

Modul 6. Klasse, Bruchteile und Bruchzahlen, Echte Brüche im Vergleich:

Brüche bestehen aus Zähler und Nenner. Doch wie zeigt sich so ein 'Zähler' ? Was wird da gezählt, oder was benennt der Nenner? Hier werden drei beliebige Brüche in Balkenform einander gegenüber gestellt.  Sind alle Balken gleich lang, so können die Brüche dennoch aus unterschiedlichen Symbolen aufgebaut sein. Einem Bruchprofi gelingt es schnell, die beiden Zahlenwerte für Zähler und Nenner gedanklich zu einem Vorstellungsbild zu verbinden!

Anleitung:

Stelle dir zum Beispiel die Aufgabe, dass alle Balken gleich lang sind, obwohl die Zahlen alle verschieden sind. Oder versuche die Balken so hinzuschieben, dass die Ungleichungskette B<C<A angezeigt wird (dazu kannst du mit der Maus die Balkenlängen verändern). Probiere dann die Reihenfolge zu verändern: A<C<B, indem du nur eine einzige Zahl der drei Brüche austauschst.

# Erweitern von Brüchen





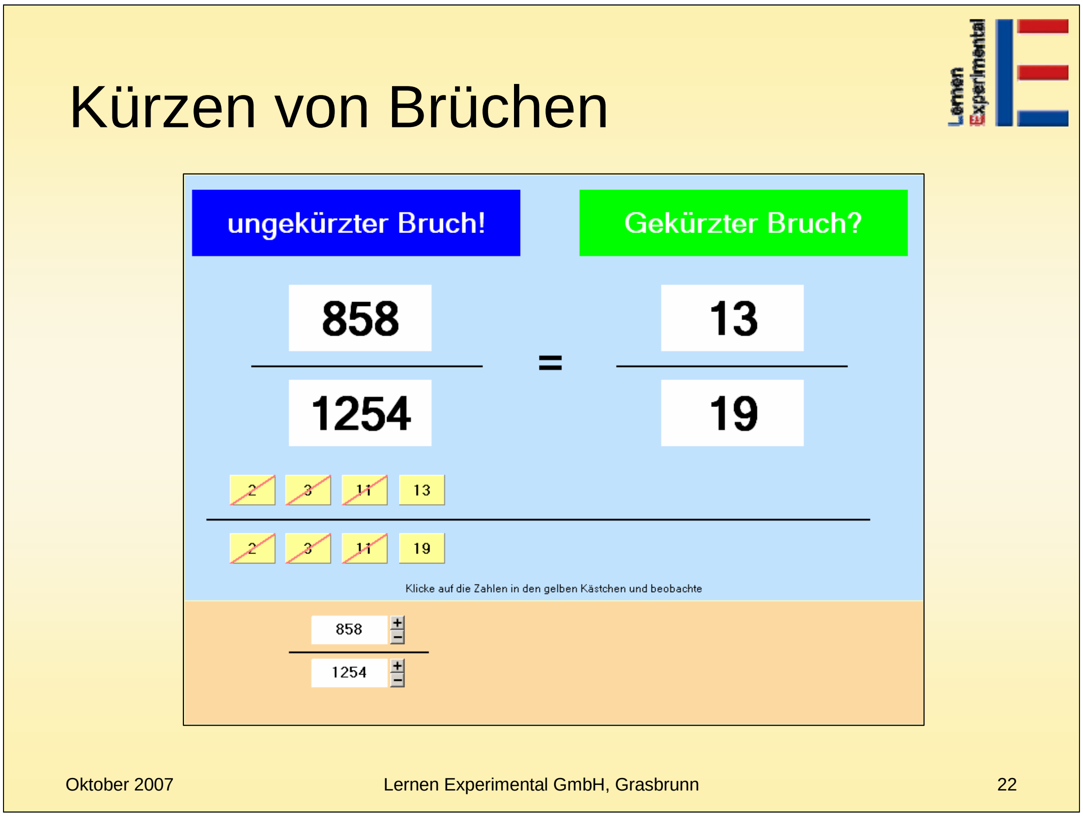

Modul 6. Klasse, Bruchteile und Bruchzahlen, Erweitern von Brüchen:

Vorzustellen ist ein Gitter, das in gleichmäßige Spalten aufgeteilt ist. In diesem geometrischen Bild würde der Vorgang des Erweiterns eines Bruches bedeuten, dass dasselbe Gitter nun zusätzlich auch waagerecht unterteilt wird. Dann brauchen nur noch die einzelnen Kästchen abgezählt werden und es ergibt sich der Zähler des erweiterten Bruches. Es ist wichtig, Zähler und Nenner nicht aus dem Blick zu verlieren, während die geometrische Darstellung verändert wird.

Anleitung:

Variiere den Bruch zum Erweitern in der Mitte der Formel und beobachte, wie immer mehr horizontale Linien hinzukommen. Zähle alle farbig markierten Felder ab und sieh nach, wo in den Brüchen dieser Wert vorkommt. Verändere nun auch den Zähler und Nenner links in der Formel. Schaue dabei auf die senkrechten und waagerechten Striche, die hinzukommen oder wegfallen.

Oktober 2007 Lernen Experimental GmbH, Grasbrunn 21

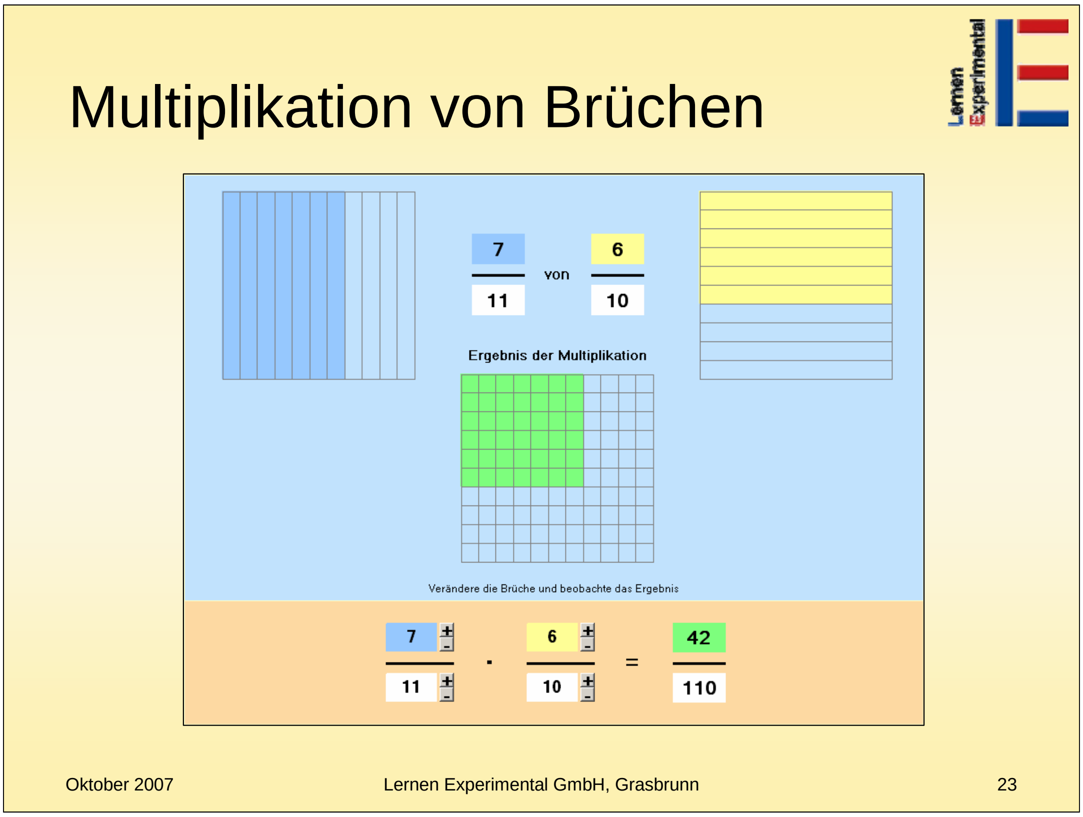



Modul 6. Klasse, Bruchteile und Bruchzahlen, Kürzen von Brüchen:

Beim Kürzen wird der Versuch unternommen, Zähler und Nenner eines Bruches jeweils in ein Produkt aus Primfaktoren zu zerlegen. Gleiche Faktoren in Zähler und Nenner lassen sich dann "wegstreichen", weil dabei der Wert des Bruches nicht verändert wird. Nach dem "Wegstreichen" bestehen Zähler und Nenner nur noch aus teilerfremden Primfaktoren und der Bruch ist vollständig gekürzt. Am besten greift der Lernende zu einem Blatt Papier, rechnet selber eine Aufgabe durch und vergleicht dann das Ergebnis mit der Computervorlage.

Anleitung:

Klicke auf die Zahlen in den gelben Kästchen. Wenn im Zähler und Nenner die angeklickte Zahl vorkommt, verschwinden beide (warum?). Am Ende lässt sich nichts mehr wegklicken (=kürzen). Dann hat man einen vollständig gekürzten Bruch erzeugt.

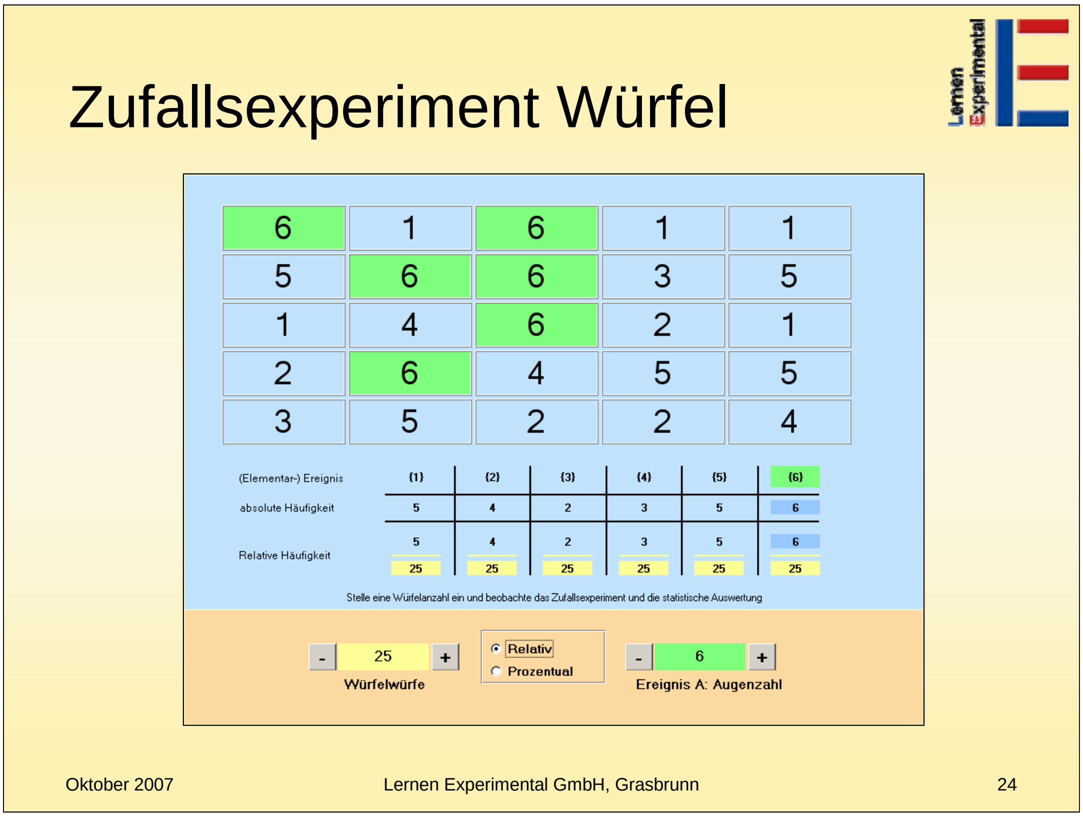



Modul 6. Klasse, Bruchteile und Bruchzahlen, Multiplikation von Brüchen:

Wie viel ist die Hälfte von einem Drittel? Dazu wird ein Ganzes in drei Teile zerlegt; dann wird eines dieser Teile (=ein Drittel) weggenommen und es wird durch zwei geteilt (=Hälfte von einem Drittel). Dieser Bruchteil sechs mal hintereinandergelegt ergibt wieder ein Ganzes.  Die Hälfte von einem Drittel ist nämlich ein Sechstel!

Anleitung:

Ziehe an den bunten Flächen der drei Bilder im Experimentierbereich (linke Maustaste gedrückt halten) und beobachte, wie sich die jeweiligen Zähler verändern. Erhöhe nun langsam einen der Nenner und beobachte, wie sich dies auf die Gestalt (Größe, Unterteilung) der Farbflächen auswirkt.

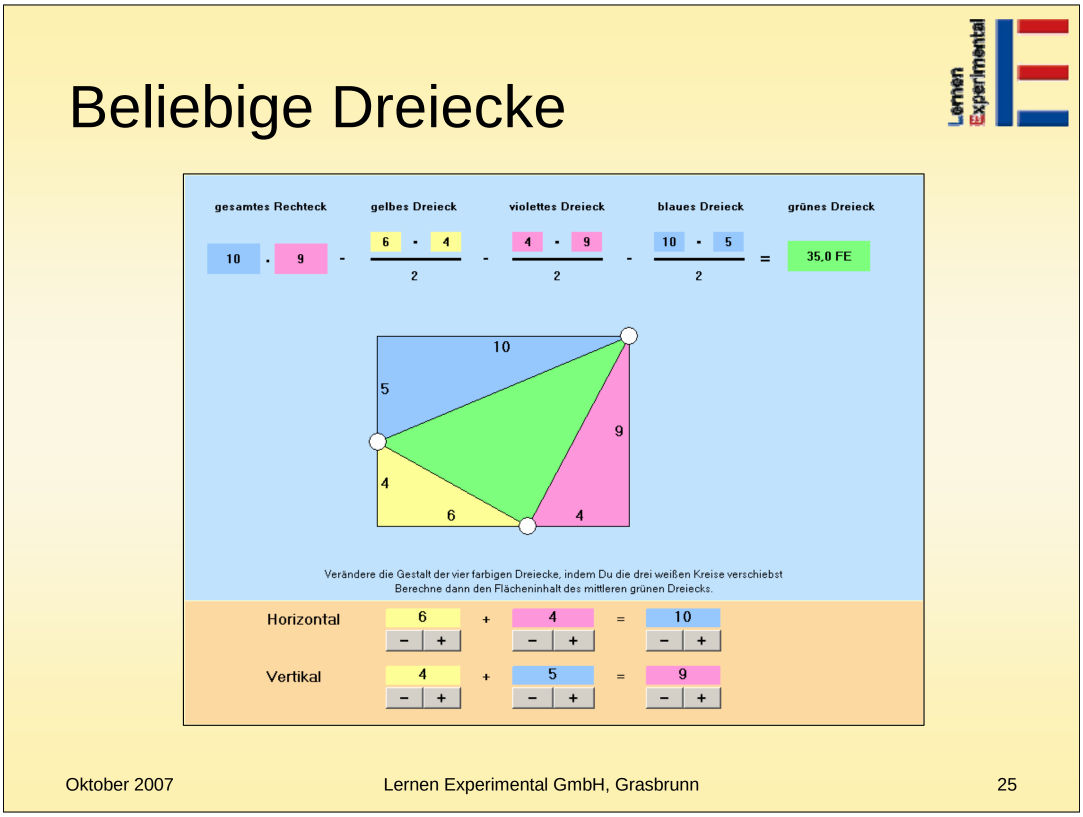



Modul 6. Klasse, Relative Häufigkeit, Zufallsexperiment Würfel:

Ein ungezinkter Würfel (= ein sogenannter Laplace-Würfel) wird geworfen: Keine der 6 Würfelseiten ist in einem solchen Würfelspiel bevorzugt. Deshalb kann die Augenzahl 1 genauso oft gewürfelt werden wie die 6, wie leicht festzustellen ist, wenn oft genug gewürfelt wird. An einer Strichliste oder einem Balkendiagramm ist die Ausgewogenheit und Gleichrangigkeit aller 6 Augenzahlen leicht abzulesen.

Anleitung:

Stelle die Anzahl der Würfe ein. Wähle ein Ereignis der Augenzahlen 1 bis 6 aus. Beobachte danach das Zahlenfeld und die statistische Auswertung. Übe auch weitere Eigenschaften der sogenannten relativen Häufigkeit: Im Eingabebereich ist jedes Elementarereignis wählbar. Das ausgewählte Ereignis ist im Experimentierbereich grün unterlegt. Klicke auf das Buchsymbol und beobachte, wie sich das An- und Ausschalten weiterer Ereignisse auf die relative Häufigkeit von zusammengesetzten Ereignissen auswirkt.

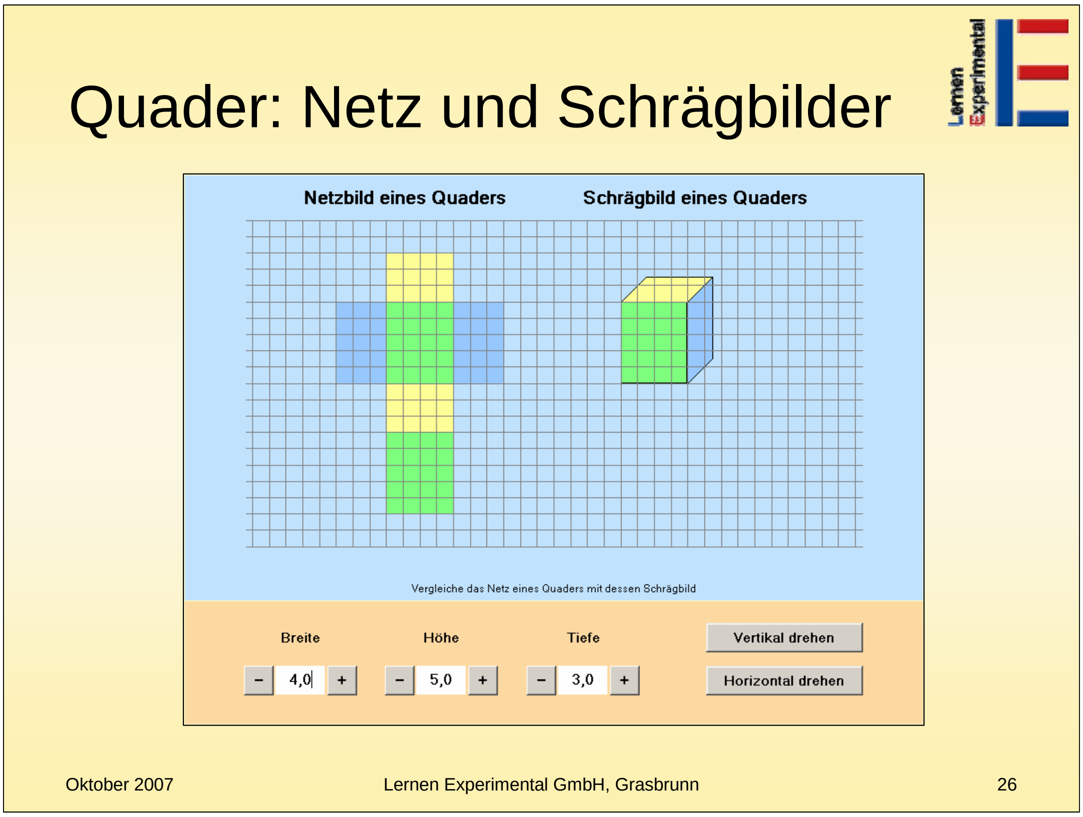



Modul 6. Klasse, Flächeninhalt und Volumen, Beliebige Dreiecke:

Wird ein Rechteck diagonal durchgeschnitten, entstehen zwei gleich große Dreiecke mit je einem rechten Winkel. Weil die Eckpunkte dieser Dreiecke identisch sind mit den Eckpunkten des Rechtecks, ist in diesem Fall die Flächenberechnung eines Dreiecks einfach. Denkbar sind jedoch auch Dreiecke ohne rechten Winkel, deren Eckpunkte auf den Rändern eines vorgegebenen Rechtecks liegen. Das nicht rechtwinklige Dreieck ist dann umgeben von drei kleineren rechtwinkligen Restdreiecken. Deren Flächeninhalt wird einfach vom Rechtecksflächeninhalt abgezogen: So kann indirekt auf den Flächeninhalt des nicht rechtwinkligen Dreiecks geschlossen werden, ohne dass auf kompliziertere geometrische Formeln zurückgegriffen werden müsste.

Anleitung:

Ziehe an den Eckpunkten des grünen (inneren Dreiecks) und beobachte dabei die Zahlenwerte an der Seite: sie geben die jeweilige Kantenlänge an. Die Zahlen tauchen auch in der Formel auf. Präge dir die Zuordnung gut ein!

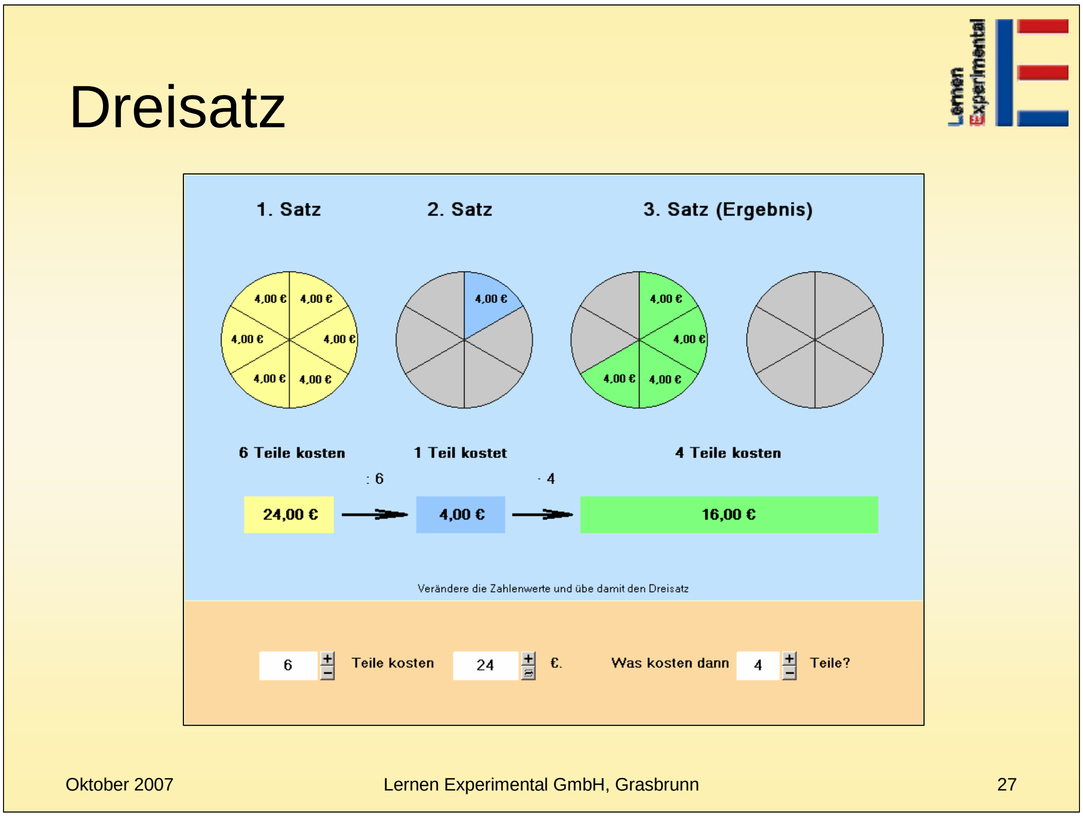



Modul 6. Klasse, Flächeninhalt und Volumen, Netz und Schrägbilder von Quadern:

Wird eine quaderförmige Schachtel geeignet aufgeschnitten, so entsteht ein sogenanntes flächenhaftes Netz, das wieder zu einem räumlichen Quader zusammengefaltet werden kann. Die Fläche des Netzes setzt sich aus drei paarweise gleichen Flächen zusammen: Boden und Deckel, linke und rechte Seite, Vorder- und Rückseite. Markiert man diese Flächen mit drei Farben und stellt das Netz seiner räumlichen Figur gegenüber, so lässt sich sehr schön daran ablesen, wie sich eine Verbreiterung des Netzes in der Figur -und umgekehrt- auswirkt. Spannend wird's, wenn die Figur um 90° gekippt oder gedreht ist und dazu das Netz betrachtet wird. Unterschiedliche Schnittkanten liefern zwar unterschiedliche Netze, jedoch immer den selben Körper mit dem selben Oberflächeninhalt.

Anleitung:

Klicke mehrmals hintereinander auf den Schalter 'vertikal / horizontal drehen' und beobachte sorgfältig die unterschiedliche Anordnung der Flächen. Die mittlere Fläche des Netzes entspricht bei diesem Modul der Vorderseite des Quaders (mit derselben Farbe). Lass dir die Berechnung des Oberflächeninhaltes anzeigen: achte auch hier wieder auf die Farbgebung der Teilergebnisse. Variiere die Abmessungen des Quaders: Breite, Höhe und Tiefe... und untersuche ihre Veränderungen sowohl am flächenhaften Netz als auch am räumlichen Körper eines Quaders.

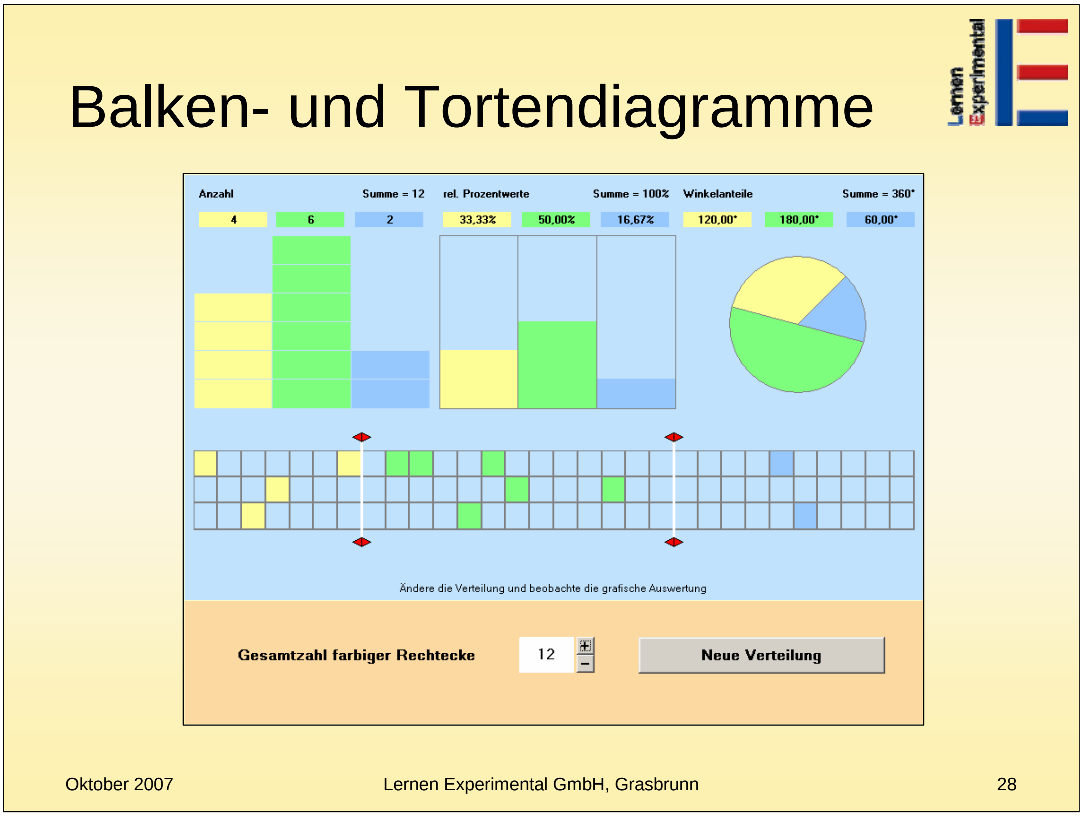



Modul 6. Klasse, Vertiefung, Dreisatz:

Beim klassischen Dreisatz gelangt man mit drei Schritten zum Ergebnis: beim ersten Schritt stellt man den Sachverhalt fest: a Dinge kosten b Euro. Beim zweiten Schritt rechnet man aus, wie viel ein Ding kostet: nämlich den a-ten Teil von b, also b/a Euro. Im dritten Schritt will man wissen, was c Dinge kosten: c mal so viel, wie ein Ding: also kosten c Dinge (b/a)*c Euro! Erst wird der Eurobetrag für a Dinge (b) durch a geteilt und dann mit c mal genommen.

Anleitung:

Über die drei einstellbaren Zahlen ist gleichzeitig auch eine bestimmte Dreisatzvorgabe festgelegt: Wenn du deine eingegebenen Zahlen mit dem Bild vergleichst, und die gelben, grünen und blauen Kreissegmente abzählst, wirst du rasch diesen Aufgabentyp durchschauen können.




Modul 6. Klasse, Vertiefung, Balken- und Tortendiagramme:

Wie kann die Situation ‚4 gelbe, 6 grüne und 2 blaue Kästchen' als Strichliste, in Form von Prozentbalken und als Kreisdiagramm dargestellt werden? Die Strichliste ist ja noch relativ einfach. Bei den Prozentbalken muss erst ermittelt werden, wie viele Kästchen insgesamt vorkommen (hier 4 + 6 + 2 = 12); Die Balkenlängen verhalten sich dann ebenfalls wie 4 zu 6 zu 2, in Kreisdiagrammen werden die 360° in 12 (= 4 + 6 + 2) Teile aufgeteilt, so dass ein Teil ein Zwölftel von 360° = 30° entspricht; 4 Teile sind dann 120° und 6 Teile 180°, 2 Teile 60°. Die Summe 120° + 180° + 60° entspricht wieder dem Vollkreis.

Anleitung:

Klicke auf das Farbgitter im Experimentierbereich und setze einen Farbstein hinzu, oder nimm einen vorhandenen weg: beachte alle drei statistischen Darstellungen (Anzahlen, Prozentbalken, Kreissegmente); Klick immer wieder auf DASSELBE Farbrechteck: wie bemerkst du den Effekt 'ein Farbkästchen mehr - ein Farbkästchen weniger' in den Grafiken? Mit der Maus kannst du auch die zwei weißen senkrechten Striche nach links oder rechts verschieben. Klicke auf 'neue Verteilung', um eine neue Farbaufteilung zu erreichen. Fahre mit der Maus über die Prozent- und Winkelangaben ganz oben; dann erfährst du, wie sich diese Zahlen indirekt aus den Anzahlen der drei Farben ergibt.

# Quellen / Impressum

- Johann Heinrich Pestalozzi (1746 - 1827)
  - „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt: IX. Brief“, 1801
- Immanuel Kant (1724 - 1804)
  - „Kritik der reinen Vernunft“
- Prof. Dr. Alfred Schreiber
  - Grundzüge der Mathematikdidaktik
- ISB Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München
  - Lehrplan Gymnasium G8, Mathematik, Jgst. 5


**Lernen Experimental GmbH**

Schusterweg 1

85630 Grasbrunn

www.tafelbilder.de info@tafelbilder.de


Oktober 2007 Lernen Experimental GmbH, Grasbrunn 29